Cours de 1ere S Sciences expérimentale BIOF

FONCTIONS - *Généralités*

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions.
2) Fonctions paires et Fonctions impaires
3) Les variations d'une fonction numérique
4) Les variations d'une fonction et la parité d'une fonction
5) Les variations des deux fonctions : αf et f+α
6) comparer deux fonctions (fonctions positives et négatives) Fonctions majorées ; minorées ; bornée
7) Les extremums d'une fonction numérique
8) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme du 2iem degré: $x \xrightarrow{f} ax^2+bx+c$
9) Etude et représentation graphique de la fonction homographique : $x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$
10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$
11) Etude et représentation graphique de la fonction : $x \xrightarrow{f} \sqrt{x+a}$
12)La composée de deux fonctions
13) Fonctions périodiques

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une ***fonction*** est un procédé qui à un nombre *x* appartenant à un ensemble D associe un nombre y. On note : $x \overset{f}{\longmapsto} y$

ou encore $f : x \mapsto y$

ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-2) Exemples

Exemple1 :

a)Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$f(x) = x^2+2x-5$ ou $g(x) = \dfrac{3x^3+2x^2-1}{5x^2-4}$.

Ou $h(x) = \dfrac{2x-1}{5x-4}$ ou $l(x) = \sqrt{x}$

$R(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonctions homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple2 :

Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2-1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par *f*.

2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par *f*,

Réponses : 1) $f(1) = 3\times1^2-1 = 3-1 = 2$ et

$f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2-1 = 6-1 = 4$

$f(-1) = 3\times(-1)^2-1 = 3-1 = 2$

2) $f(x)=2$ ssi $3\times x^2-1=2$

ssi $3\times x^2=2+1$ ssi $3\times x^2=3$ ssi $x^2=1$

ssi $x=-1$ ou $x=1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

1-3) Domaine de définitions

activités

a. On considère la fonction définie par : $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D f

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$.

14) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x(x^2-2)=0$ ssi $x=0$ ou

$x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ ssi $x\leq 2$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $-3x\geq -6$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0 \quad a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et

$x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq0\right\}$ soit Δ son discriminant

$a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-9x+3}{x+1}\geq0 et x+1\neq0\right\}$

$-9x+3=0$ ssi $x=\frac{1}{3}$ ssi $-9x=-3$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\right\}$

$-2x^2+x+3=0 \quad a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines

$x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq0\right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$

Or on sait que $|x|\geq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

12) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq0 et x-1\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq-2 et x\neq1\right\}$

$D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

13) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-x\geq0 et x\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq0 et x\neq0\right\}$

$D_f=]-\infty,0[$

14) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq0\right\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\}$

$2\cos x-1=0$ ssi $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ ssi $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0 et x^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est Δ' = 2^2 – 4 x (-2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6:

Le discriminant est Δ = (-1) ^{2} – 4 x (-6) x 1 =25 et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et

$x_2'=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et

$x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow|x|^2+2|x|-3=0$ on pose

$|x|=X$ donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est Δ = 2^2 – 4 x 1 x (-3)= 16 et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ n'a pas de solution

$|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 et 3-5x\geq 0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\dfrac{1}{2} et x\leq\dfrac{3}{5}\right\}$

Donc $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1 Définitions

a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition : On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et et seulement si :

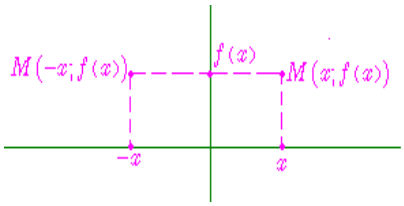
Pour tout réel x, si $x\in D_f$, alors $-x\in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$^{\circ}*$ (ou $^{\circ}$-{0})	$^{\circ}$-{1}
$^{\circ}$-{-1; 1}	$^{\circ}$-{-1; 2}
$[-4;\ 4]$	$[-4;\ 3]$

2.2. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire.
(c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

2.3. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

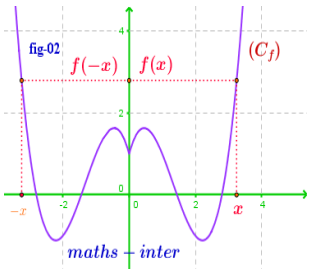
Remarques :

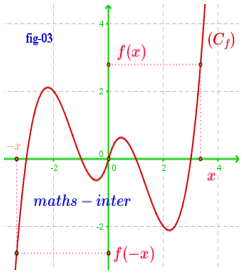
-si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
-la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
-la fonction $x \to \tan x$ est impaire,
-l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
-l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
-la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Fonction paire **Fonction impaire**





Exemple 1 :

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

Donc $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \dfrac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \dfrac{3}{-x} = -\dfrac{3}{x}$
  $g(-x) = -g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$
  $h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \dfrac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x - 2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

on a $-2 \in D_t$ mais $-(-2) = 2 \notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

Exemple 2 :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

5) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$.

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Solutions : 1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{-x} = -\dfrac{x^2-1}{x}$

  $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = (-x)^2 + \dfrac{1}{-x} = x^2 - \dfrac{1}{x} = \left(-x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x) \neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x^2-1 \neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$, alors $-x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

- $f(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2-1} = \dfrac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = [-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x \in [-1,1]$, alors $-x \in [-1,1]$

- $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2}$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+5 \neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5} = \dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2+4 \geq 0\}$

Or on sait que $2x^2 \geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4 \geq 0+4$ donc $2x^2+4 \geq 4 \geq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2+4} = |x| - \sqrt{2x^2+4}$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ Donc

$D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exemple 3 : Soit la fonction définie par :

$5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$ Pour tout réel x

1)montrer que f est une fonction impaire

2)donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$

On a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1)

Pour tout réel x

On remplaçant x par –x on trouve :

$5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1)+ (2) donne : $6\left(f(-x)+f(x)\right)=0$ donc :

$f(-x)+f(x)=0$

donc : $f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f est une fonction impaire

2)on a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc :

$5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

Exemple 4 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$ et (C_f) la courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

Solution : $D_f=\{x \in \mathbb{R} / 2|x|-3 \neq 0\}=\left\{x \in \mathbb{R} / |x| \neq \frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors

$-x \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante - fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors

$f(x_1) \prec f(x_2) \quad \left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors

$f(x_1) \succ f(x_2) \quad \left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

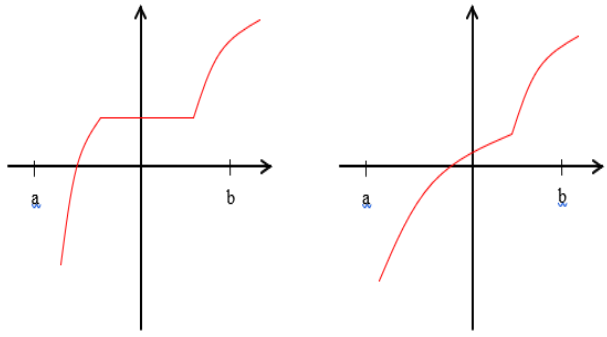
- Dire f que est constante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$

alors $f(x_1)=f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur [a,b], mais non strictement croissante

Fonction strictement croissante sur [a,b]

Exemples : 1) Soit f une fonction tq :

$f(x)=7x-5$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $7x_1 \prec 7x_2$ car $7 \succ 0$

Donc $7x_1-5 \prec 7x_2-5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

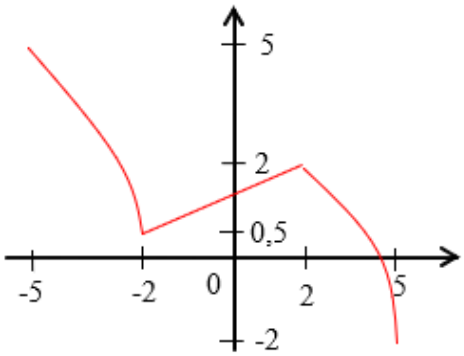
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b)tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

3)



x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	0,5	↗	2	↘	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tq :

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Exemple : Soit f une fonction tq :

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

Exemples :

1)Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0; +\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗

2)Soit f une fonction tq : $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x + 1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1 + 1} - \frac{x_2}{x_2 + 1} = \frac{x_1(x_2 + 1) - x_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

a)sur $I =]-\infty; -1[$

Soit $x_1 \in]-\infty; -1[$ et $x_2 \in]-\infty; -1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec -1$ et $x_2 \prec -1$ Donc $x_1 + 1 \prec 0$ et $x_2 + 1 \prec 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \dfrac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \succ 0$ sur $I =]-\infty; -1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty; -1[$

b)sur $J =]-1; +\infty[$

Soit $x_1 \in]-1; +\infty[$ et $x_2 \in]-1; +\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$ Donc $x_1 + 1 \succ 0$ et $x_2 + 1 \succ 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \dfrac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \succ 0$ sur $J =]-1; +\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1; +\infty[$

c) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

3-3) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Exemple : Soit f une fonction :tq : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I =]0; 1]$ puis sur $J = [1; +\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x} = -x - \dfrac{1}{x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}$

$=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$

$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$

a)sur $I=]0;1]$ Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$

Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$ Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ Donc $x_1x_2-1\succ 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I
Donc f est strictement décroissante sur I'
f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗	-2	↘ ‖ ↘	2	↗

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

5) Les variations des deux fonctions : αf et f+α

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

- Si $\alpha\in\mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha\in\mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variation opposées sur I
- f et α+f ont les mêmes variations sur I

Exemples :

1)soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$g(x)=\frac{6}{x}$

On sait que la fonction $f:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et puisque $6\succ 0$ donc la fonction $g=6f$ est aussi décroissante sur $[0;+\infty[$

2)Soit f et g les fonction numérique :

$f(x)=x^2$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$h(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ Donc alors les fonctions f et g ont des variation opposées sur $\mathbb{R}$
g et h ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗	0	↘

6) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives)

Fonctions majorées ; minorées et bornée :

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement
si : Elles ont même ensemble de définition :
$D_f=D_g=\mathbb{R}$
et Pour tout $x\in D_f$: f (x) = g(x) et On écrit :
$f=g$

Exemple : Les fonction f et g définies respectivement par :

$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Réponse :

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$

donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$

on a f (x) = g(x)

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies

Sur I. On dit que :

1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$. On note : $f\leq g$ Sur I.

2)f est positive sur I lorsque : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$. On note : $f\geq 0$ sur I.

3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x)\leq M$ pour tout $x\in I$

4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m\leq f(x)$ pour tout $x\in I$

5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m\leq f(x)\leq M\ \forall x\in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$ ssi La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$ ssi La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I

6-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ donc $f\prec g$

Exemple2 Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Exemple3 Soient les deux fonctions : $f(x)=\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x)=\frac{1+3x^2}{|x|}$

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

or on sait que $x^2\geq 0$ donc $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

alors $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $|x|\neq 0$ ssi $x\neq 0$

donc $D_g=\mathbb{R}^*$

alors $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2}=|x|$ et $3x^2+1=1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouvé que : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x)

Donc : f=g.

Exemple4 Soient les deux fonctions : $h(x)=\frac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

- on a $h(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$
- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

Exemple5 Soit f la fonction numérique tel que:

$f(x)=\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier le signe de le fonction f

Solution : $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\frac{1}{2}$ et $x\neq\frac{1}{2}$

Donc : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$f(x)\geq 0$ ssi $x\in\left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{1}{2};2\right]$ donc $f\geq 0$

$\forall x\in\left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{1}{2};2\right]$

$f(x)\leq 0$ ssi $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\cup[2;+\infty[$

Exemple6 Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x)=-x^2+x=-\left(x^2-x\right)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$

donc : $f(x)\leq\frac{1}{4}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=\frac{1}{4}$

Exemple7 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$ est Bornée.

Solution : On a $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq\sin x\leq 1$ donc $-4\leq 4\sin x\leq 4$

donc $-4-3\leq 4\sin x-3\leq 4-3$

donc $-7\leq g(x)\leq 1$ g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple8 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ donc $\frac{1}{x^2+1}\leq 1$

donc $f(x)\leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=1$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ donc $x^2+1\succ 0$

Donc : $0\prec f(x)$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=0$

conclusion : $0\leq f(x)\leq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple9 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$.Conclure

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\neq 0\right\}$

$\Delta=-3\prec 0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-1\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x)-1=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ or $x^2+3x+3\succ 0$ car $\Delta=-3\prec 0$

(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3\left(x^2+3x+3\right)}\leq 0$$

par suite f est majorée par $\frac{7}{3}$.

conclusion : $1\prec f(x)\leq\frac{7}{3}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple10 Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1)déterminer les valeurs de m pour que $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tq :

$g(x)=\frac{1}{x+2}$ déterminer les valeurs de m pour que $\forall x\in\{-2;1\}$ on a : $f(x)=g(x)$

Solution :

1) $D_f=\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:x^2+x+m\neq 0$

$x^2+x+m\neq 0$ ssi $\Delta=b^2-4ac=1-4m\prec 0$

Ssi $m\succ\frac{1}{4}$

2) $f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\Leftrightarrow$

$$\frac{x-1}{x^2+x+m}=\frac{1}{x+2}$$

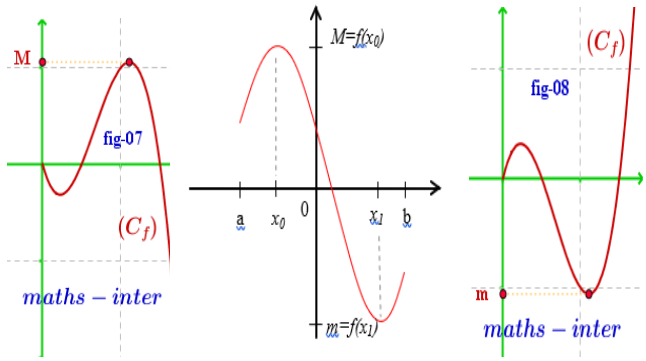
$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=x^2+x+m \Leftrightarrow$

$x^2+x-2=x^2+x+m$

$f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\} \Leftrightarrow -2=m$

7) Les extremums d'une fonction Numérique

7-1)) Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a\in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $x\in I$: $f(x)\le f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x\in I$: $f(x)\ge f(a)$

7-2) Exemples d'applications :

1° Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=5x^2+3 \qquad D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\ge 0$ Donc $5x^2\ge 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\ge 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\ge f(0)$

d'où $f(0)=3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-4x^2+1 \qquad D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\ge 0$ Donc $-4x^2\le 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\le 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\le g(0)$

d'où $g(0)=1$ est un maximum absolue de g sur $\mathbb{R}$

7-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=-4x^2+4x+5$

1°a) montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) $f(x)\le 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses: 1°a) on a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-(4x^2-4x+1)$

$=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\ge 0$

Par suite $-(2x-1)^2\le 0$ donc $6-(2x-1)^2\le 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $6-(2x-1)^2\le 6$ alors

$f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exemple2 : Du tableau de variation on a :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	0,5	↗	2	↘	-2

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0=2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0=-2$

Exemple3 :

Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=-x^2+4x-3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\le 1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4$

$f(x)-1=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2\le 0$

Donc $f(x)\le 1\ \forall x\in\mathbb{R}$ et on a :

$f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Donc 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\le f(2)\ \forall x\in\mathbb{R}$

que $f(2)=1$ est le maximum absolue de f sur $\mathbb{R}$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$$

1)Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a)soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-3=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\frac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$$

Donc $f(x)-3=\frac{-x^2}{x^2+1}\le 0$ par suite $f(x)\le 3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x)\le f(0) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

2) a)soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-2=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\frac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$$

Donc $f(x)-2=\frac{1}{x^2+1}\succ 0$ par suite :

$0\prec f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=2$

b) on remarque que : $f(x)\succ 2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

conclusion : $2\prec f(x)\le 3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1)étudier le signe de f

2) a)Démontrer que f est majorée par $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) est ce que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) soit $x\in]1;+\infty[$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$f(x)=\frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$$

Donc $f(x)\succ 0$ si $x\in]1;+\infty[$

2) a) $x\in]1;+\infty[$ montrons que $f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x\in]1;+\infty[$ donc $x\succ 1$ cad $x+1\succ 2$

donc $\sqrt{x+1}\succ\sqrt{2}$ donc $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

donc $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\prec\frac{1}{2\sqrt{2}}$

donc $f(x)\prec\frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

conclusion : $2\prec f(x)\le 3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x)\le f(0) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exemple6 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1))Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1)

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\neq 0 et x\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq -2 et x\ge 0\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x) \geq -1$ et que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} + 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \geq 0$$

Donc $f(x) \geq -1 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ et on a :

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0) = -1$ donc : $f(x) \geq f(0) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ont dit que $f(0) = -1$ est le minimum absolue de f sur $\mathbb{R}^+$

3) soit $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \frac{-4}{\sqrt{x} + 2} \prec 0$

Donc $f(x) \prec 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M = 1$

Et puisque $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1; +\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \ \forall x \in]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exemple7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1)a) Démontrer que f est minorée.

b) est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

1)a) $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2$

Donc $f(x) - 2 = (x - 1)^2 \geq 0$

donc : $f(x) \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

et on a : $f(1) = 2$ donc : $f(x) \geq f(1) \ \forall x \in \mathbb{R}$

donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 + 2 \leq M$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \leq M - 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x - 1)^2} \leq \sqrt{M - 2}$ (on peut toujours supposer $M \geq 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq \sqrt{M - 2}$

Donc on a : $-\sqrt{M - 2} \leq x - 1 \leq \sqrt{M - 2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M - 2} + 1 \leq x \leq \sqrt{M - 2} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ absurde

Donc f est non majorée

8) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

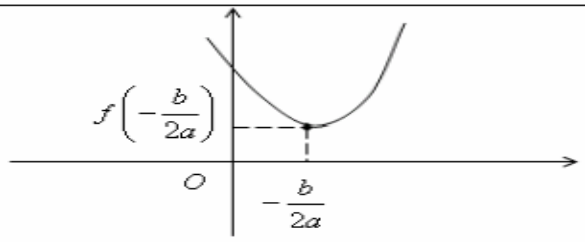
8-1)Résumé : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

1° Dans le repére $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° <u>Les variations de f</u>

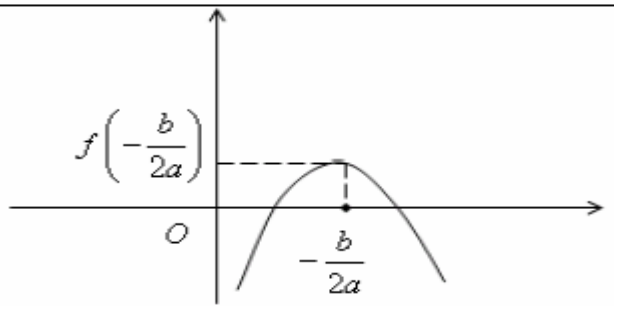
<u>Si</u> $a \succ 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	



<u>Si</u> $a \prec 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	



2-2) Exemples :

1° Soit f une fonction numérique

tq : $f(x)=2x^2-4x-2$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $\left(f(1)=2-4-2=-4\right)$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4$$

Soit $W(1;-4)$ Donc dans le repére $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ l

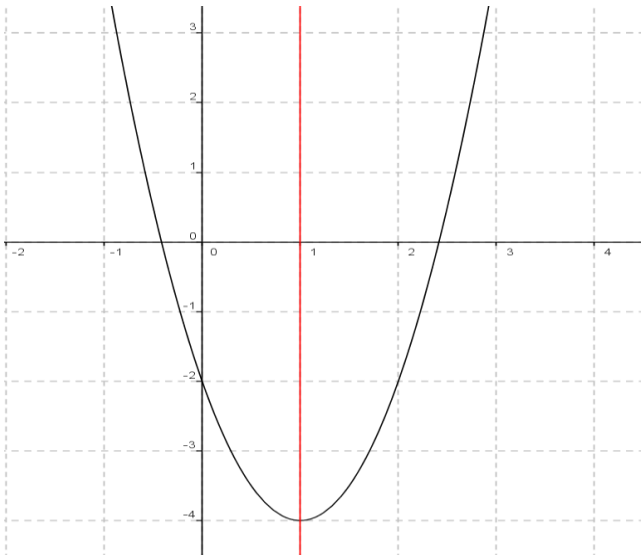
a courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;-4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗



$W(1;-4)$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1$

$\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

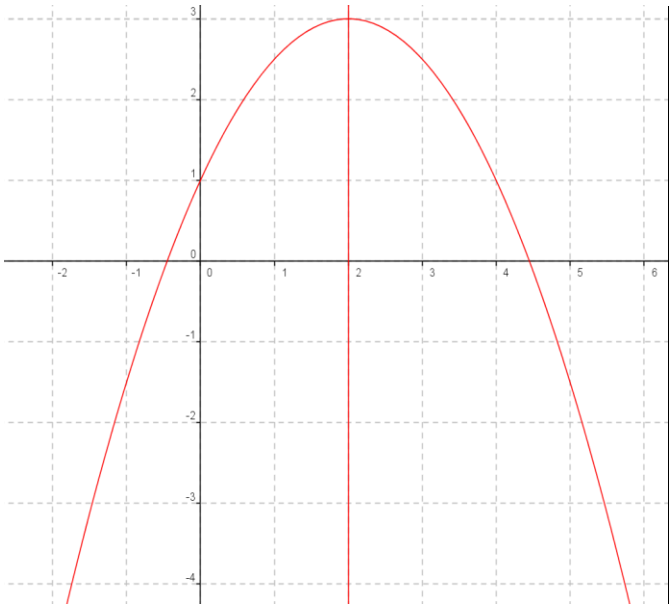
$\left(g(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$

Soit $W(2;3)$ Donc dans le repére $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘



9) Etude et représentation graphique des fonctions homographique :

$x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad a \neq 0$ et $c \neq 0$

9-1)Résumé et propriété :1)Soit f une fonction tq : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $cx+d \neq 0$ ssi $x \neq -\dfrac{d}{c}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

2iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \prec 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

9-2) Exemples :

Exemple1: Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \prec 0$

- Donc le tableau de variations de

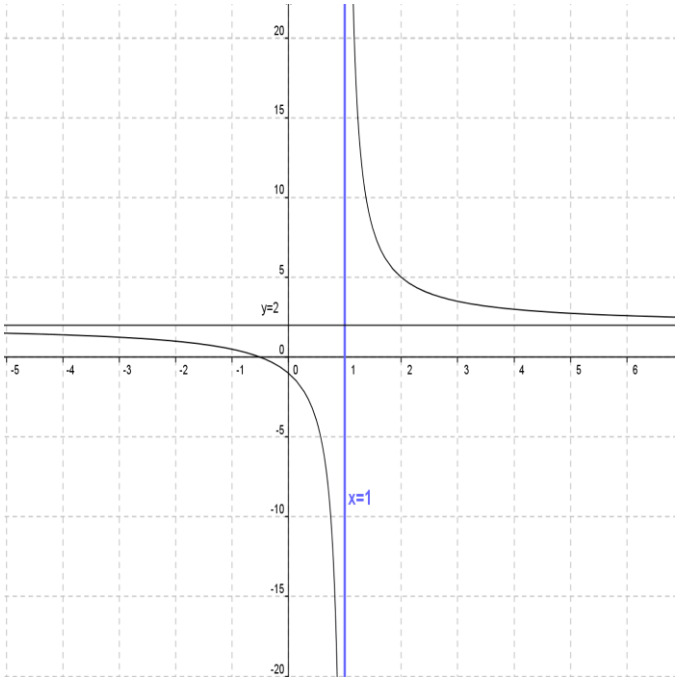
$x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

- Représentation graphique

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$



Exemples2:

Soit g une fonction numérique

tq : $g(x) = \dfrac{-x}{x-2}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \succ 0$

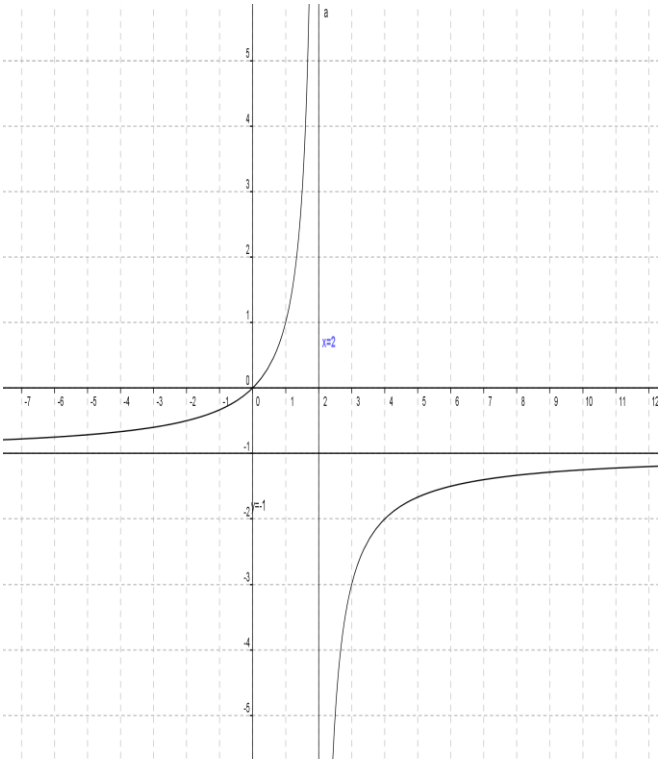
- Donc le tableau de variations

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

- Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

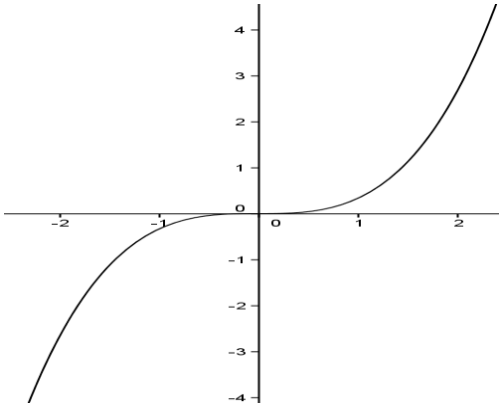
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



11) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2,+\infty[$

2)soient $x_1 \in [-2;+\infty[$ et $x_2 \in [-2;+\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1+2 < x_2+2$ Donc : $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$

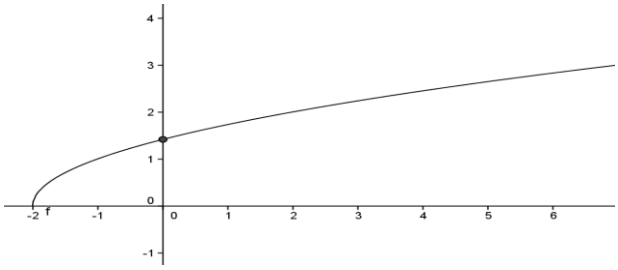
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



12)La composée de deux fonctions

13-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté : $g \circ f$ définie sur I par :

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$

On peut alors faire le schéma suivant :

$x \to f(x) = y \to g(f(x)) = z$

13-2) Exemples

Exemple1 : Soit les fonctions f et g tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$

Déterminer : $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution :on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc

$D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ et $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$

$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3$

$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$

Remarque :1)La composée de deux fonctions n'est pas commutative

c.-à-d. $g \circ f \neq f \circ g$

2)Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \, et \, f(x) \in D_g\}$

Exemple2: Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g \circ f}$

2) déterminer : $(g \circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \, et \, f(x) \in D_g\}$

On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ donc

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \, et \, f(x) \neq -1\}$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 4 = -1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} = x$

donc : $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

2)on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

et $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+4) = \dfrac{1}{3x+4+1}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x+5}$

Exemple3 : Soit les fonctions f et g définies par : $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$ et $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x) = (g \circ f)(x)$

1) Déterminer D_h 2) déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonctions k définie par : $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1)on a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et

$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \, et \, f(x) \in D_g\}$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \, et \, f(x) \neq -2\}$

$f(x) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x+1} = -2$

$\Leftrightarrow -2(x+1) = x + 3 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

donc : $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}; -1\right\}$

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)$

$$h(x) = \frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3}{x+1} + 2} = \frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3+2x+2}{x+1}} = \frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{3x+5}{x+1}} = \frac{x+3}{3x+5}$$

Donc : $h(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}; -1\right\}$ et $D_k = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

Exemple4 : exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x) = \sqrt{x+3}$

3) $h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$

Solution : 1) $h_1(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x) = (g \circ f)(x)$

avec $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

2) $h_2(x) = \sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x) = (g \circ f)(x)$

avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

13-3) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f (I).

➪ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g\circ f$ Est croissante sur I.

➪ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f (I) alors là fonction $g\circ f$ est décroissante sur I.

Remarque : Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaire

La fonction g ◦ f est décroissante sur I

Exemple1: Soit f la fonction f définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ tel que : $f(x)=-5x^2+7$

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaire :

$v(x)=-5x+7$ et $u(x)=x^2$

La fonctions $f=v\circ u$

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et $u(x)=x^2\in[0;+\infty[$ et I

v est décroissante sur $[0;+\infty[$ Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exemple2::Soit la fonction h définie sur $]-\infty;1]$ par $h(x)=\sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon $h=g\circ f$

on a alors : $f(x)=1-x$ et $g(x)=\sqrt{x}$

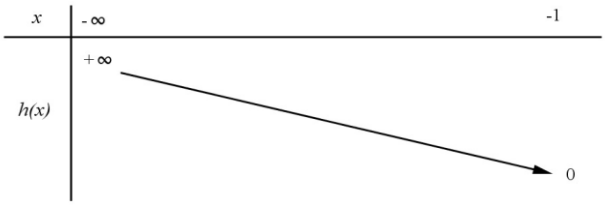
2) On sait que :

➪ f est décroissante sur $]-\infty;1]$

➪ g est croissante sur $f(]-\infty;1])=[0;+\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $]-\infty;1]$

On a alors le tableau de variation suivant



13) Fonctions périodiques :

Définition :On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x\in D$ on a $x+T\in D$

b) $\forall x\in D$ on a $f(x+T)=f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réelle strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction $x\to E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T=2\pi$ et la fonction tangente est périodique de période $T=\pi$

4) La période des fonctions: $f:x\to\cos(ax)$ et $f:x\to\sin(ax)$ $a\neq 0$ est $T=\dfrac{2\pi}{a}$

Exemple1 : Montrer que la fonction $f:x\to x-E(x)$ est périodique de période 1.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a:

$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

Exemple2 : Quelle est la période des fonctions suivantes :

1) $f:x\to\sin(4x-1)$ 2) $g:x\to\cos(5x)$

3) Trouver une fonction de période $T=\dfrac{3}{4}$

Solution :1) $T=\dfrac{2\pi}{a}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 2) $T=\dfrac{2\pi}{5}$

3)Une fonction est. $h:x\to\cos(\dfrac{8\pi}{3}x)$

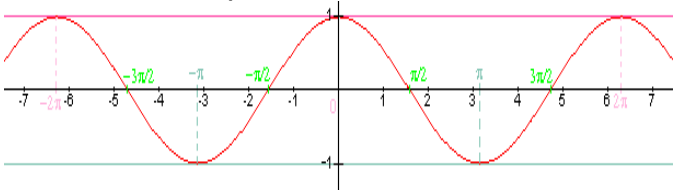
Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période

Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de

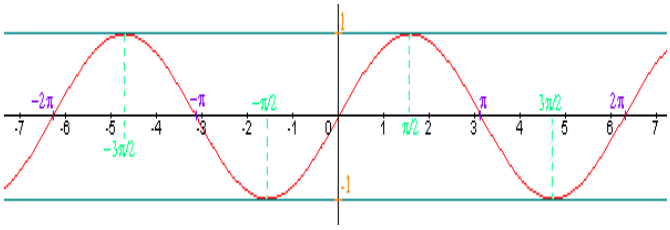
construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

Exemple3 : Observons une courbe représentative de la fonction cos on a $T=2\pi$ et sur $[-\pi;\pi]$ dont la longueur est égale à 2π

La courbe se répète tous les $T=2\pi$



Exemple4 : courbe représentative de la fonction sin :



Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$ tel que : $f(x)=2x-x^2 \quad \forall x\in[0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repére $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

Solution : dans l'intervalle $I_0=[0;2[$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$

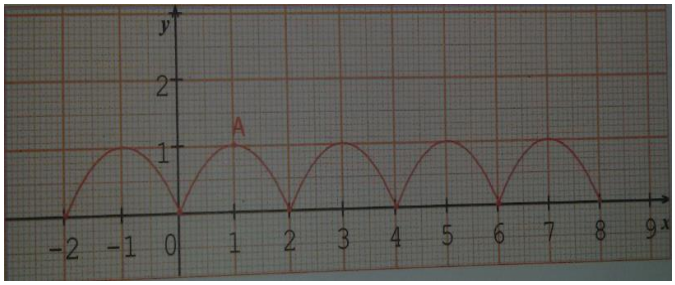
$(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=1$ et $(f(1)=2-1=1)$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2[$

et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) calculer :

$f(4.1)=f(2+2.1)=f(2.1)=f(2+0.1)=f(0.1)$

$f(4.1)=2(0.1)-(0.1)^2=0.19$

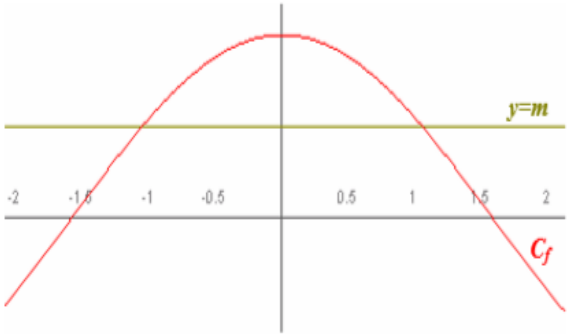
$f(-3.5)=f(-4+0.5)=f(0.5)$

$f(-3.5)=2(0.5)-(0.5)^2=0.75$

$f(265.11)=f(2\times132+1.11)=f(1.11)$

$f(1.11)=2(1.11)-(1.11)^2\approx0.98$

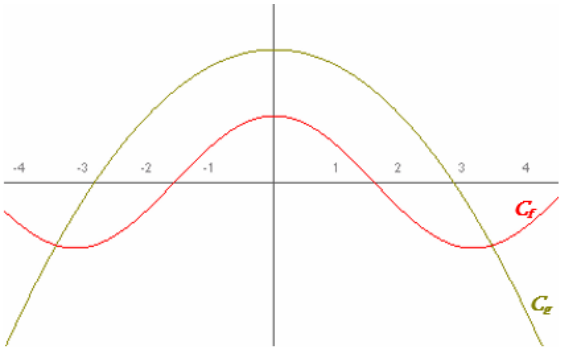
15) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations



Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées `a la physique, la chimie, l'´économie, ?

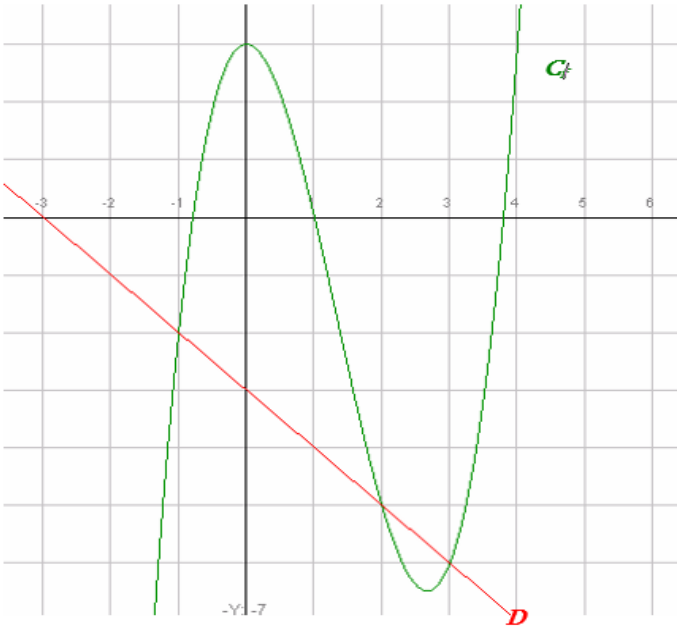
1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g.



On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y) \in (C_f)$ ssi $y = f(x)$



$M(x;y) \in (C_g)$ ssi $y = g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a $M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$ donc

soit $f(x) = g(x)$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g) .

Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

2) Quelques exercices d'application

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ puis l'inéquation $f(x) \prec 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f(x) \geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0;4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{a;1;b\}$ Avec $-1 \prec a \prec -0.5$ et $3.5 \prec b \prec 4$

$f(x) \geq 0 \quad S = [a;1] \cup [b;+\infty[$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y = -x - 3$ donc $S = \{-1;2;3\}$

$f(x) \leq -x - 3 \quad S =]-\infty;-1] \cup [2;3]$

Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

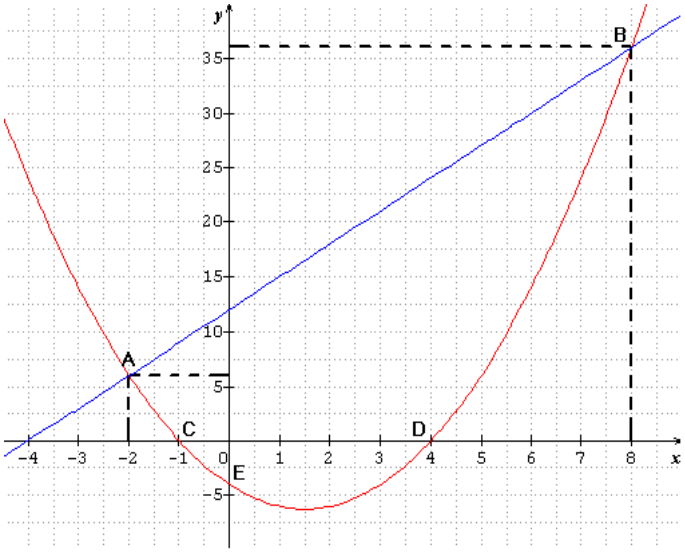
1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=8$ donc $S=\{-2;8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ ssi $x^2-3x-4=3x+12$ ssi $x^2-6x-16=0$

$a=1$ et $b=-6$ et $c=-16$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-16)=36+64=100=(10)^2>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8 \text{ et}$$

$$x_2=\frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

donc $S=\{-2;8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

$f(x)\succ g(x)$ ssi $x^2-3x-4\succ 3x+12$ ssi $x^2-6x-16\succ 0$

Les racines sont : $x_1=8$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $x^2-3x-4=0$

$a=1$ et $b=-3$ et $c=-4$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25=(5)^2>0$$

$$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4 \text{ et } x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a $f(0)=0^2-3\times0-4=-4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$

Exercice3: Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l' axes des abscisses

b)Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l' axes des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4) a)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b)Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Réponses : 1)a) $f(x)=-x^2-2x+3$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $\left(f(-1)=4\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

<u>Donc le tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	4	↘

1)b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+2\neq 0$

ssi $x\neq -2$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\succ 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=1$

<u>Donc le tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $-x^2-2x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et

$x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$ donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

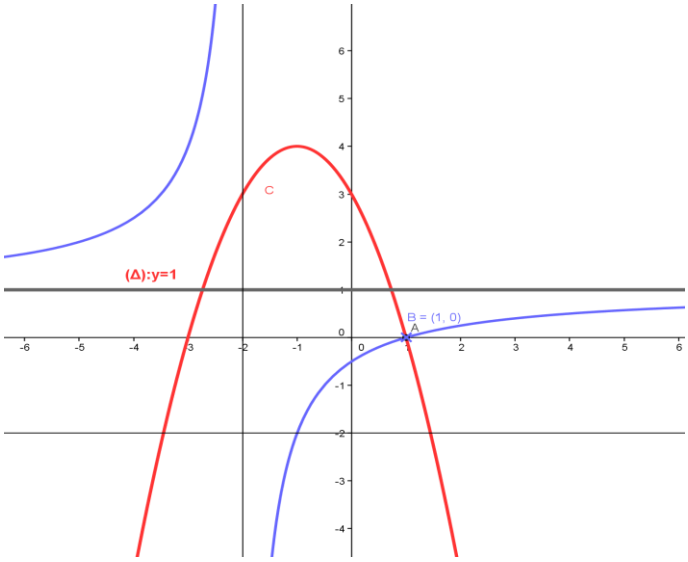
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

$g(x)=0$ ssi $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

<u>3)Représentation graphique</u>

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ donc $S=\{1\}$

4)b) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-2;1\right]$

Donc $S=\left]-2;1\right]$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}}\succ 0$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{x}}\succ 1$

donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\succ 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\succ 2$

donc $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}\prec\frac{1}{2}$ donc $f(x)\prec\frac{1}{2}$

et on a : $f(0)=0\prec\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\prec\frac{1}{2}$

par suite f est majorée par $\frac{1}{2}$.

conclusion : $0\prec f(x)\prec\frac{1}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple5 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

3) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

soit $x\in\mathbb{R}^+$

$f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2-4$

$f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4$ donc

$f(x)+4=\left(x+\sqrt{x}\right)^2\geq 0$

donc $f(x)+4\geq 0$ donc $f(x)\geq -4$

et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

donc $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4\leq M$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(x+\sqrt{x}\right)^2\leq M+4$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+: x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4}$ (on peut toujours supposer $M\geq 0$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(\sqrt{x}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+: x\leq\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$ Absurde

Donc f est non majorée

Exercice6 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par:

$f(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$ et $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ et

$h(x)=x^2+2$

1)a)Etudier les variations de g et de h

b)étudier le signe de la fonction g

2)montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etudier les variations de f dans les intervalles :

$]1;+\infty[$; $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Réponses :1)a) $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-1\neq 0$ ssi $x\neq 1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\prec 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

1)a)on a h est une fonction polynôme donc $D_h=\mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	2	↗

b)étudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$		1	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{2x+3}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$

2)montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

$(h\circ g)(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=\frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}$

$(h\circ g)(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etude des variations de f dans les intervalles :

a) sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$:

On a $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]: g(x)\in[0;+\infty[$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{3}{2};1\right[: g(x)\in]-\infty;0]$ et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

c) sur $]1;+\infty[$:

Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x\in]1;+\infty[\ g(x)\in]0;+\infty[$ et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-3/2$		1	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗	‖	↘

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

prof: Atmani najib